



Prof. Dr. H.-D. Donder

Parmenides García Cornejo, Andreas Fackler

Wintersemester 2010/2011

16. November 2010

Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen

Übungsblatt 4

Aufgabe 1: Sei $Q = [0, 1] \times [2, 3]$. Bestimmen Sie

$$\int_Q (4x + 5y) d(x, y).$$

Aufgabe 2: Sei $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x, y)\| \leq 2\}$. Bestimmen Sie

$$\int_K xy d(x, y).$$

Aufgabe 3: Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt, und seien $f, g : K \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $f \leq g$. Setze

$$A = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in K, f(x) \leq t \leq g(x)\}.$$

Zeigen Sie, dass A integrierbar ist und gilt:

$$v(A) = \int_K (g - f) dx$$

Aufgabe 4: Seien $f, h : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar mit $f \leq h$ und

$$\int f dx = \int h dx.$$

Sei $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mit $f \leq g \leq h$. Zeigen Sie, dass g integrierbar ist und

$$\int g dx = \int f dx.$$

Abgabe bis spätestens 11:30 Uhr am 22. November 2010 im Übungskasten.



Andreas Fackler

22. November 2010

Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen

Lösungsvorschlag zu Übungsblatt 4

Aufgabe 1: $4x + 5y$ ist stetig und Q kompakt, also ist die Funktion integrierbar. Für $y \in [2, 3]$ ist $Q_y = [0, 1]$, ansonsten ist $Q_y = \emptyset$. Wir erhalten also:

$$\int_Q (4x + 5y) d(x, y) = \int_2^3 \left(\int_0^1 (4x + 5y) dx \right) dy = \int_2^3 (2 + 5y) dy = 2 + \frac{5}{2}(9 - 4) = \frac{29}{2}$$

Aufgabe 2: xy ist stetig und K kompakt, also ist xy über K integrierbar. Da $K_y = \emptyset$ für $y \notin [-2, 2]$, und $K_y = [-\sqrt{4 - x^2}, \sqrt{4 - x^2}]$ sonst, gilt:

$$\int_K xy d(x, y) = \int_{-2}^2 \left(\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} xy dy \right) dx = \int_{-2}^2 0 dy = 0$$

Aufgabe 3: Als stetige Funktionen auf einer kompakten Menge sind f und g beschränkt. Ist m das Minimum von f und M das Maximum von g , so ist $A \subseteq K \times [m, M]$, also ist A beschränkt. Sei nun $((x_k, t_k)_{k \in \mathbb{N}})$ eine gegen (x, t) konvergente Folge in A . Dann ist wegen der Stetigkeit von f und g :

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\lim_{k \rightarrow \infty} x_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} t_k = t \\ g(x) &= g\left(\lim_{k \rightarrow \infty} x_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} g(x_k) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} t_k = t \end{aligned}$$

Also ist auch $(x, t) \in A$ und somit ist A abgeschlossen. Damit haben wir gezeigt, dass A kompakt und somit integrierbar ist. Wir erhalten:

$$v(A) = \int_x v(A_x) dx = \int_x v([f(x), g(x)]) dx = \int_x (f - g) dx$$

Aufgabe 4: $h - f \geq 0$ ist integrierbar mit Integral 0, also ist auch $\|h - f\|_1 = 0$, das heißt, $h - f$ ist fast überall 0. Nun ist aber $0 \leq g - f \leq h - f$, also ist auch $g - f$ fast überall 0. Insbesondere ist also g fast überall gleich f , und somit haben die beiden Funktionen nach dem Modifikationssatz das gleiche Integral.